*Мы уйдем, а уравнения будут жить вечно!*

*Свой урок, я посвящаю моему коллеге,*

*учителю и другу Павлу Ивановичу Григорьеву*

**Тема открытого урока: "Решение тригонометрических уравнений"**

**Цель и задачи урока:**

1. повторить основные формулы и методы решения тригонометрических уравнений;
2. закрепить умения и навыки решения тригонометрических уравнений общими и специальными методами;
3. познакомить кадет с новым методом решения уравнений.

**Ход урока:**

1. Организационный момент.

Сообщить тему урока, сформулировать его цели.

1. Проверка домашнего задания.

4 ученика на доске записывают решения домашних уравнений. Остальные работают устно.

Графопроектор высвечивает на экран тригонометрические простейшие уравнения, кадеты отвечают на вопросы:

 - используем при решении уравнений частные или общие формулы?

 - что необходимо помнить при решении таких уравнений?

 - sin² x = 1; cos² x = $\frac{1}{2}$ ; tg x = 5; ctg x = $\frac{1}{3}$.

3. Основная часть урока.

Решение простейших уравнений мы вспомнили, проверили решение домашнего задания, можно приступить к решению более сложных тригонометрических уравнений, которые нам понадобятся при сдаче ЕГЭ-2024.

Начнем с общих методов:

1. **Разложение на множители (часто используется при подготовке к ЕГЭ)**

Пример № 1

2 sin 2x + sin x = 0

*Решение:* 4 sin x cos x + sin x = 0

 sin x ( 4 cos x + 1 ) = 0

sin x = 0 или 4 cos x + 1 = 0

x = $π$n, n ∈ Z cos x = - $\frac{1}{4}$

 x = ± arccos ( - $\frac{1}{4}$ ) + 2$ π$m, m ∈ Z

 x = ± ( $$ – arccos $\frac{1}{4}$ ) + 2 $π$m, m ∈ Z

*Ответ:* $π$n, n ∈ Z; ± ( $π$ – arccos $\frac{1}{4}$ ) + 2 $π$m, m ∈ Z

Пример № 2

sin 7x + sin 3x = 2 cos 2x

*Решение:* 2 sin $\frac{7x+3x}{2}$ \* cos $\frac{7x-3x}{2}$ – 2 cos 2x = 0

 2 sin 5x cos 2x – 2 cos 2x = 0

 2 cos 2x ( sin 5x – 1 ) = 0

 2 cos 2x = 0 или sin 5x – 1 = 0

cos 2x = 0 sin 5x = 1

2x = $\frac{π}{2}$ + $πn$, n ∈ Z \* $\frac{1}{2}$ 5x = $\frac{π}{2}$ + 2$ πm$, m ∈ Z \* $\frac{1}{5}$

x = $\frac{π}{4}$ + $\frac{πn}{2}$, n ∈ Z x = $\frac{π}{10}$ + $\frac{2πm}{5}$, m ∈ Z

*Ответ:* $\frac{π}{4}$ + $\frac{πn}{2}$, n ∈ Z ; $\frac{π}{10}$ + $\frac{2πm}{5}$, m ∈ Z

1. **Метод введения новой переменной (решение тригонометрических уравнений, приводящихся к квадратным)**

Пример № 3

sin² x + sin x – 2 = 0

*Решение:*

Пусть sin x = t, Ι t Ι ≤ 1, имеем:

t² + t – 2 = 0, т.к. a + b + c = 0, то

t₁= 1, t₂= $\frac{c}{a}$ , значит t₁= 1, t₂= -2

Вернемся к замене:

sin x = 1 или sin x = -2 – решений нет, т.к. Ι -2 Ι = 2 > 1

x = $\frac{π}{2}$ + 2 $πn$, n ∈ Z

*Ответ:* $\frac{π}{2}$ + 2 $πn$, n ∈ Z

Пример № 4

8 sin² x + 6 cos x – 6 = 0

*Решение:* 8 ( 1 - cos² x ) + 6 cos x – 6 = 0

1. – 8 cos² x + 6 cos x – 6 = 0
* 8 cos² x + 6 cos x + 2 = 0

Пусть cos x = t, Ι t Ι ≤ 1, имеем:

-8t² + 6t + 2 = 0, т.к. - 8 + 6 + 2 = 0, то

t = 1, t₂= $\frac{c}{a}$ = - $\frac{2}{8}$ = - $\frac{1}{4}$

cos x = 1 или cos x = - $\frac{1}{4}$

x = 2 $πn$, n ∈ Z , x = ± arccos ( - $\frac{1}{4}$ ) + 2$ πm$, m ∈ Z

 x = ± ( $$ – arccos $\frac{1}{4}$ ) + 2$ πm$, m ∈ Z

Пример № 5

2 tg x - ctg x = 1

т.к. ctg x = $\frac{1}{tg x}$ , то левая часть имеет смысл если tg x ≠ 0, ctg x ≠ 0

2 tg x - $\frac{1}{tg x}$ – 1 = 0

Пусть tg x = t, тогда имеем:

2t - $\frac{1}{t}$ – 1 = 0

$\frac{2t^{2}-t-1}{t}$ = 0, t ≥ 0

2 t² - t – 1 = 0

t₁= 1; t₂= - $\frac{1}{2}$

Вернемся к замене:

tg x = 1 или tg x = - $\frac{1}{2}$

x = $\frac{π}{4}$ + $πn$, n ∈ Z x = arctg ( - $\frac{1}{2}$ ) + $πk$, k ∈ Z

x = - arctg $\frac{1}{2}$ + $πk$, k ∈ Z

*Ответ:* x = $\frac{π}{4}$ + $πn$, n ∈ Z; x = - arctg $\frac{1}{2}$ + $πk$, k ∈ Z

3.Рассмотрим примеры решения **однородных тригонометрических уравнений Ⅰ и Ⅱ степени.**

Уравнение вида, a **sin kx + b cos kx = 0** (a ≠ 0, b ≠ 0) **однородное уравнение Ⅰ степени.** Оно решается делением обеих частей на **cos kx.** При этом потери корней нет, т.к. если cos kx = 0, то аsin kx=0, значит sin kx=0, ибо а≠ 0.Тогда a sin² kx + b cos² kx = 0, что не возможно (по основному тригонометрическому тождеству a sin² kx + b cos² kx = 1) значит cos kx ≠ 0.В результате получим уравнение а tg x + в = 0. Далее решаем его.

 Уравнение вида **a sin**² **kx + в sin kx \*cos kx +с cos**² **kx = 0** **однородное уравнение Ⅱ степени** относительно sin kx b и cos kx. Разделим обе части нашего уравнения на  **cos² kx ≠ 0 ,** то есть перейдем к решению уравнения относительно tg x, и введению новой переменной.

Рассмотрим следующий пример №6 **2sin 3x - 5 cos 3x = 0** /$ $ **cos**  **3x ≠ 0,**

 **2** tg3 x - 5 = 0

 tg 3 x = 5/2

 3х= arctg $\frac{5}{2}$ + $πk$, k ∈ Z

 х= 1/3 arctg $\frac{5}{2}$ + $πk/3$, k ∈ Z.

Ответ: 1/3 arctg $\frac{5}{2}$ + $πk/3$, k ∈ Z.

Пример №7. **2 sin**² **x + 3 sin x \*cos x -2 cos**² **x = 0** / **cos²** **x ≠ 0,**

Получим 2 tg² x +3 tg x -2 = 0, пусть tg x = t, имеем 2 t² + 3t -2=0, воспользуемся вспомогательными уравнением перекинем 2 и умножим на -2.

Имеем а² +3а -4=0, а1=1, а2=-4, значит корни нашего уравнения t₁= -2; t₂= $\frac{1}{2}$

Вернемся к замене tg x = $\frac{1}{2}$ tg x = -2

 х1= arctg $\frac{1}{2}$ + $πk$, k ∈ Z, х2= -arctg $2$ + $π$m, m ∈ Z.

Ответ: arctg $\frac{1}{2}$ + $πk$, k ∈ Z, -arctg $2$ + $π$m, m ∈ Z.

Хочу показать еще одно уравнение. Это жесть!

**Пример №8 3sin x +4 cos x = 5,** это не однородное уравнение первой степени!!! Предлагаю следующее решение: для этого вспомним формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество.

**sin 2x = 2sin x \* cos x,**

**cos 2x = cos**² **x - sin**² **x,**

 **sin² x + cos² x = 1 , заменим аргумент х на** $\frac{х}{2}$ **, имеем**

**sin x = 2sin**  $\frac{х}{2}$ **\* cos**  $\frac{х}{2}$**,**

 **cos x = cos**²$\frac{х}{2}$ **- sin**²$\frac{х}{2}$**,**

 **sin²** $\frac{х}{2}$ **+ cos²** $\frac{х}{2}$ **= 1, вместо sin x, cos x и 1 запишем:**

**3\*2sin**  $\frac{х}{2}$ **\* cos**  $\frac{х}{2} $ **+4 (cos**²$\frac{х}{2}$ **- sin**²$\frac{х}{2}$ **) =5\*( sin² x + cos² x),** раскроем скобки, приведем подобные, получим однородное уравнение Ⅱ степени и смело делим на **cos²** $\frac{х}{2}$  **≠ 0** , и решаем уравнение :

9 tg² $\frac{х}{2}$  -6 tg $\frac{х}{2}$  +1 = 0, пусть tg $\frac{х}{2}$  = t, имеем

9 t² - 6 t + 1=0, решим при помощи вспомогательного уравнения,

а² - 6 а + 9=0, т.к левая часть квадрат разности, а1=а2=3, значит корни исходного уравнения t₁= t₂ =$\frac{3}{9}$= $\frac{1}{3}$ .Вернемся к замене

 tg $\frac{х}{2}$  =$\frac{1}{3}$,

 $\frac{х}{2}$  =arctg $\frac{1}{3}$ + $πk, $k ∈ Z !\*2

 х  = 2 arctg $\frac{1}{3}$ + $2 πk, $k ∈ Z.

Ответ: 2 arctg $\frac{1}{3}$ + $2 πk, $k ∈ Z.

4.Итог урока:

Итак, мы повторили основные методы решения тригонометрических уравнений. Дома необходимо решить следующие уравнения, разделяя их по методам решения:

**1).** 5 **cos**² **x + 6 sin**  **x -6=0,**

**2).** 2 tg² x +3 tg x -5 = 0,

**3). 4 sin**² **x -1=0,**

**4). cos**² **x + sin**  **x\* cos x=0,**

**5). sin 2x + sin**² **x=** 4 **cos**² **x.**

Ну что, дорогие мои кадеты, где вы себя ощущали; на гребне волны синусоиды или во впадине? Усвоили ли вы для себя что-то новое, или ничего не прибавили к своему образованию? Желаю успешной домашней работы и подготовки к ЕГЭ.

Учитель математики ГКОУКШИ «Тимашевского казачьего кадетского корпуса»

Моисеева Тамара Викторовна

13.04.2023